

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темами

**«ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З НЕГАРМОНІЙНИМИ
ДЖЕРЕЛАМИ ЕНЕРГІЇ»,
«РОЗРАХУНОК ТРИФАЗНИХ КІЛ, ЩО ЖИВЛЯТЬСЯ
НЕГАРМОНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ НАПРУГИ»**

з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки"
(для студентів усіх форм навчання напрямів
0906 - "Електротехніка" і 0922 - "Електромеханіка")

Методичні вказівки до практичних занять за темами «Лінійні електричні кола з негармонійними джерелами енергії», «Розрахунок трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги» з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" (для студентів усіх форм навчання напрямів 0906 - "Електротехніка" і 0922 - "Електромеханіка"). Укл.: Форкун Я.Б., Самошкін В.П., Капустін Г.В., Юрченко С.М. – Харків: ХНАМГ, 2008 – 34 с.

Укладачі: доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,
доц., к.т.н. В.П. Самошкін,
доц., к.т.н. Г.В. Капустін,
ст. викл. С.М. Юрченко

Рецензент: проф., д.т.н. А.Г. Сосков

**Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,
протокол № 10 від 15.05.2008 р.**

ВСТУП

Електротехнікою називається широка область практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) - дисципліна, яка займається питаннями розрахунку та вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукцією магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою усіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, що є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Студенти, які навчаються за напрямками 0906 – «Електротехніка» і 0922 – «Електромеханіка», вивчають курс «Теоретичні основи електротехніки» протягом двох семестрів. У першому семестрі, коли треба засвоїти основні положення дисципліни, закони й методи розрахунку електричних кіл, розглядаються теми «Постійний струм» і «Синусоїдний струм», а в другому - теми «Лінійні електричні кола з негармонійними джерелами енергії», «Перехідні процеси в лінійних електричних колах», «Нелінійні кола постійного і змінного струму».

Видами аудиторних занять дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» є лекції, лабораторні й практичні заняття. Практичні заняття є дуже важливими для засвоєння теоретичного матеріалу, що розглядається на лекціях. Крім того, на практичних заняттях мають бути отримані знання, що стануть студенту в нагоді при виконанні самостійної роботи, а саме розрахунково-графічної роботи № 2, ч.І за темою «Розрахунок трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги».

Ці методичні вказівки складені відповідно до програми курсу «Теоретичні основи електротехніки» для спеціальностей вищевказаних напрямів і призначені для студентів денної і заочної форм навчання. Стислі роз'яснення деяких теоретичних положень розділу «Лінійні електричні кола з негармонійними джерелами енергії», а також ряд задач з докладним вирішенням допоможуть студентам у вивченні цієї досить складної теми.

Тема І. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З НЕГАРМОНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ЕНЕРГІЇ

Загальні відомості

В електротехніці з різних причин можуть виникнути несинусоїдні періодичні струми і напруги (наявність в колі джерела, що виробляє несинусоїдну напругу; наявність в колі з джерелами синусоїдної напруги нелінійних елементів та ін.).

Основою розрахунку таких кіл є розкладання функцій напруги і струму в тригонометричні ряди Фур'є, а саме:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)/} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)//} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)/} \cdot \sin(2\omega t) + A_m^{(2)//} \cdot \cos(2\omega t) + \\ + A_m^{(3)/} \cdot \sin(3\omega t) + A_m^{(3)//} \cdot \cos(3\omega t) + \dots + A_m^{(k)/} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)//} \cdot \cos(k \omega t) + \dots, \quad (1.1)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t - \text{нульова гармоніка (чи постійна складова);} \quad (1.2)$$

$$A_m^{(k)/} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \omega t) d\omega t - \text{амплітуда синусоїдної складової} \quad (1.3)$$

гармоніки з номером k ;

$$A_m^{(k)//} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \omega t) d\omega t - \text{амплітуда косинусоїдної складо-} \quad (1.4)$$

вої гармоніки з номером k .

Ряд Фур'є можна також записати у вигляді суми нульової гармоніки і синусоїдних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^n A_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (1.5)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)/2} + A_m^{(k)//2}}; \quad \varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)//}}{A_m^{(k)/}} - \text{амплітуда і початкова} \quad (1.6)$$

фаза k -ї гармоніки.

Діюче значення несинусоїдної періодичної функції:

$$F = \sqrt{A^{(0)2} + \frac{A_m^{(1)2}}{2} + \frac{A_m^{(2)2}}{2} + \frac{A_m^{(3)2}}{2} + \dots + \frac{A_m^{(k)2}}{2}}. \quad (1.7)$$

Середнє за модулем значення несинусоїдної періодичної функції:

$$F_{cp} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} |f(\omega t)| d\omega t. \quad (1.8)$$

Несинусоїдні періодичні криві характеризуються коефіцієнтами:

- коефіцієнтом форми кривої (це відношення діючого значення до середнього за модулем значення) - $K_\phi = \frac{F}{F_{cp}}$;

- коефіцієнтом амплітуди (це відношення амплітудного значення до діючого значення) - $K_a = \frac{F_m}{F}$;
- коефіцієнт викривлення (це відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї кривої) - $K_\epsilon = \frac{F^{(1)}}{F}$, де $F_1 = \frac{A_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{A_m^{(1)/2} + A_m^{(1)/2}}}{\sqrt{2}}$.

Усі несинусоїдні періодичні криві, з якими мають справу в електротехніці, поділяються на дві групи: криві геометрично правильної форми й криві неправильної форми. Ряди Фур'є для несинусоїдних періодичних кривих геометрично правильної форми наведені в довідковій літературі (або в підручниках).

Наведемо приклад рядів Фур'є для кривих геометрично правильної форми, а саме для форми у вигляді трикутника та прямокутника (рис.1, 2):

1) ряд Фур'є для кривої $e(\omega t)$, що має форму трикутника -

$$e(\omega t) = \frac{8 \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left[\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right], \text{ В.}$$

2) ряд Фур'є для кривої $e(\omega t)$, що має прямокутну форму -

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right], \text{ В.}$$

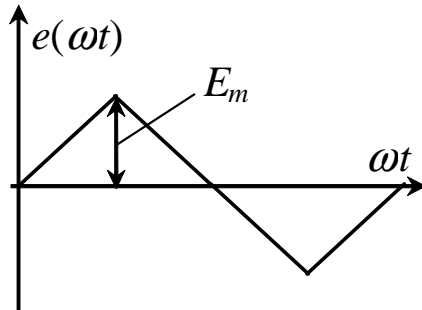


Рис.1

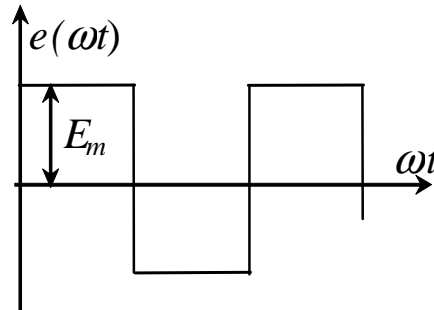


Рис.2

Несинусоїдні періодичні криві неправильної форми розкладаються в ряд Фур'є графоаналітичним методом. Останній полягає в заміні інтегралів (1.2), (1.3), (1.4) сумою кінцевого числа доданків. Для цього період функції 2π поділяють на n рівних інтервалів, кожен інтервал - $\Delta\omega t = \frac{2\pi}{n}$ (звичайно $n=24$).

Таким чином, амплітуда нульової гармоніки дорівнює:

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t), \quad (1.9)$$

де p – поточний індекс; $p=1 \div n$;

$f_p(\omega t)$ – значення функції $f(\omega t)$ у середині інтервалу з номером p , тобто коли $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$.

Амплітуди синусоїдної та косинусоїдної складових k -ї гармоніки відповідно:

$$A_m^{(k)/} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t); \quad (1.10)$$

$$A_m^{(k)//} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} \right);$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t)), \quad (1.11)$$

де $\sin_p(k\omega t)$ і $\cos_p(k\omega t)$ - значення функцій $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ у середині p -го інтервалу, тобто коли $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$.

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо ті чи інші гармоніки виключаються з ряду (див. табл.1).

Таблиця 1.1 – Види симетрії несинусоїдних періодичних кривих

№ п/п	Симетрія відносно	Математична умова	Особливості розкладання (гармоніки, що відсутні)
1	Осі ординат	$f(\omega t) = f(-\omega t)$	$A_m^{(k)/}$
2	Початку координат	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$	$A^{(0)} = A_m^{(k)//}$
3	Осі абсцис	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)/} = A_m^{(2k)//}$
4	Одночасно випадок 2 і 3	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$ $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)/} = A_m^{(k)//}$
5	Одночасно випадок 1 і 3	$f(\omega t) = f(-\omega t)$ $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)//} = A_m^{(k)/}$

Примітка: Серед задач, розглянутих в цих методичних вказівках є задача, пов'язана з графоаналітичним методом розкладання в ряд Фур'є.

Розрахунок електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії

Слід відзначити, що кола з несинусоїдними джерелами енергії розраховують *методом накладання*. Порядок розрахунку наступний:

- Представити несинусоїдні напругу чи струм джерела рядом Фур'є.
- Розрахувати комплекси віток для окремих гармонік. Для гармоніки з номером k :

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega L - \frac{1}{k \cdot \omega C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right), \quad (1.12)$$

де $X_L^{(1)}$, $X_C^{(1)}$ - індуктивний і ємнісний опори для першої гармоніки.

- Розрахувати струми і напруги на ділянках кола від дії нульової гармоніки джерела, враховуючи, що фізичний смисл нульової гармоніки, скажімо, напруги, – це постійна напруга. Тому падіння напруги на індуктивності від дії нульової гармоніки струму дорівнює нулю ($U_L^{(0)} = 0$, $X_L^{(0)} = 0 \cdot \omega L = 0$), а струм вітки з ємністю нульової гармоніки відсутній ($I_C^{(0)} = 0$, $X_C^{(0)} = \frac{1}{0 \cdot \omega C} = \infty$).
- Розрахувати комплекси струмів і напруг на ділянках кола від дії першої гармоніки джерела, після цього – від дії другої гармоніки джерела та т.д.
- Записати миттєві значення струмів і напруг на ділянках кола для окремих гармонік.
- Записати ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді сум окремих гармонік

Потужності в колах несинусоїдного струму поділяють на:

- активну потужність – дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік

$$P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} = I^2 \cdot R \text{ (Вт)}; \quad (1.13)$$

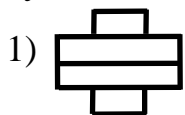
- реактивна потужність дорівнює сумі реактивних потужностей окремих гармонік

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} I^{(k)2} \cdot X^{(k)} \text{ (ВАр)}; \quad (1.14)$$



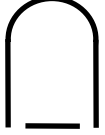
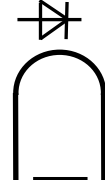
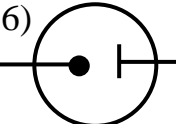
- повну потужність $S = U \cdot I \text{ ВА}; \quad (1.15)$

- потужність спотворення $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \text{ (ВА)}; \quad (1.16)$

Несинусоїдні струми і напруги вимірюють приладами різних систем, які реагують на ті чи інші величини (діючу, середню за модулем, постійну складову, максимальне значення):



- електродинамічна система вимірює діючу величину $u(\omega t)$ та $i(\omega t)$;

- 2)  - теплова система вимірює діючу величину $u(\omega t)$ та $i(\omega t)$;
- 3)  - електромагнітна система вимірює діючу величину $u(\omega t)$ та $i(\omega t)$;
- 4)  - магнітоелектрична система з випрямлячем вимірює середнє за модулем значення $u(\omega t)$ та $i(\omega t)$;
- 5)  - магнітоелектрична система з рухомою рамкою вимірює постійну складову $u(\omega t)$ та $i(\omega t)$;
- 6)  - амплітудні електронні прилади вимірюють максимальне значення.

З а д а ч а 1

Побудова несинусоїдної кривої, якщо функція була задана аналітично у вигляді ряду Фур'є

Побудувати криву струму, рівняння якого:

$$i(\omega t) = 40 \cdot \sin(\omega t - 15^\circ) + 14,2 \cdot \sin(3\omega t + 60^\circ), \text{ А.}$$

Визначити діюче і максимальне значення струму.

Для вирішення задачі необхідно

- знати основні величини, що характеризують негармонійний струм і напругу; дві форми запису ряду Фур'є;
- вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції.

Вирішення

Довільно вибираємо масштаб струму, наприклад $m_i = N \frac{\text{А}}{\text{см}}$. Будуємо першу гармоніку струму, для чого довольнo вибираємо масштаб по осі абсцис, наприклад $m_{\omega}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$. Оскільки початкова фаза першої гармоніки струму $\psi^{(1)} = -15^\circ$, то синусоїда першої гармоніки зсунута на $15^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 15^\circ, \text{рад} \right)$ вправо від початку координат відповідно до обраного масштабу.

Потім будуємо третю гармоніку струму. Частота третьої гармоніки в три

рази більше, ніж частота першої гармоніки, тобто для третьої гармоніки масштаб по осі абсцис - $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{m_{\omega t}^{(1)}}{3} = \frac{N_1}{3}$. Оскільки початкова фаза третьої гармоніки струму $\psi^{(3)} = 60^\circ$, то синусоїда третьої гармоніки зсунута на 60° вліво відповідно до масштабу $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$.

Таким чином у масштабі $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$ і $m_{\omega t}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$ будуємо першу гармоніку струму; у $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$ і $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$ будуємо третю гармоніку струму.

Графічно складаємо ординати гармонік струму й отримуємо результуючу форму кривої несинусоїдного струму – рис.3.

З графіка знаходимо максимальне значення струму $i_{\max} = |OK| = 51,8 \text{ А}$.

Діюче значення несинусоїдного струму

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{\frac{40^2}{2} + \frac{14.2^2}{2}} = 42,4 \text{ А}.$$

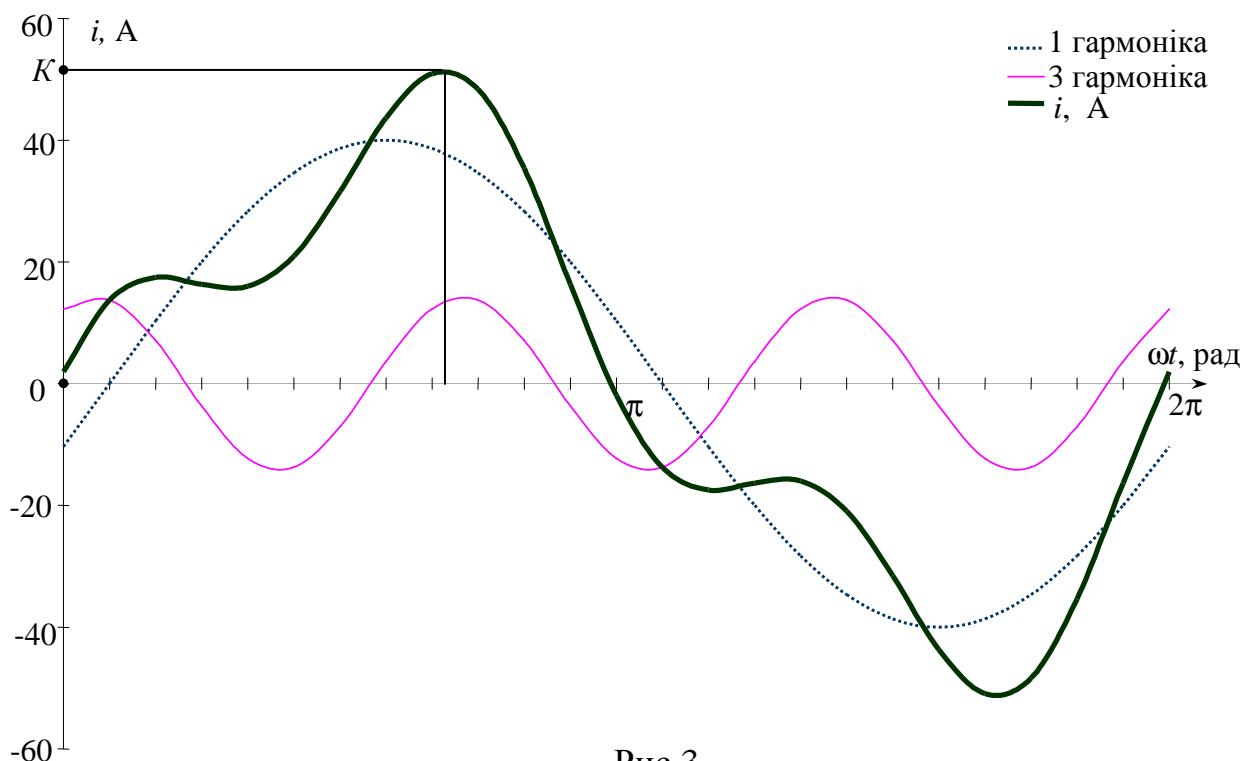


Рис.3

Слід відзначити, що максимальне значення струму може бути знайдено і аналітичним шляхом, що буде розглянуто в наступній задачі.

З а д а ч а 2

Побудова несинусоїдальної кривої, що задана аналітично у вигляді ряду Фур'є, і встановлення діючого й максимального значення несинусоїдної напруги $u(\omega t)$.

Задана крива напруги у вигляді ряду Фур'є -
 $u(\omega t) = 120 + 40 \cdot \sin \omega t + 14 \cdot \sin 3\omega t$, В.

Побудувати криву напруги $u(\omega t)$, В.

Знайти:

- діюче значення напруги $u(\omega t)$;
- максимальне значення напруги $u(\omega t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції;
- вміти знаходити аналітично діюче значення несинусоїдної функції.

Вирішення

1. Графік несинусоїдної напруги $u(\omega t)$ поданий на рис.4.

2. Діюче значення напруги:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{120^2 + \frac{40^2}{2} + \frac{14^2}{2}} = 123,68 \text{ В.}$$

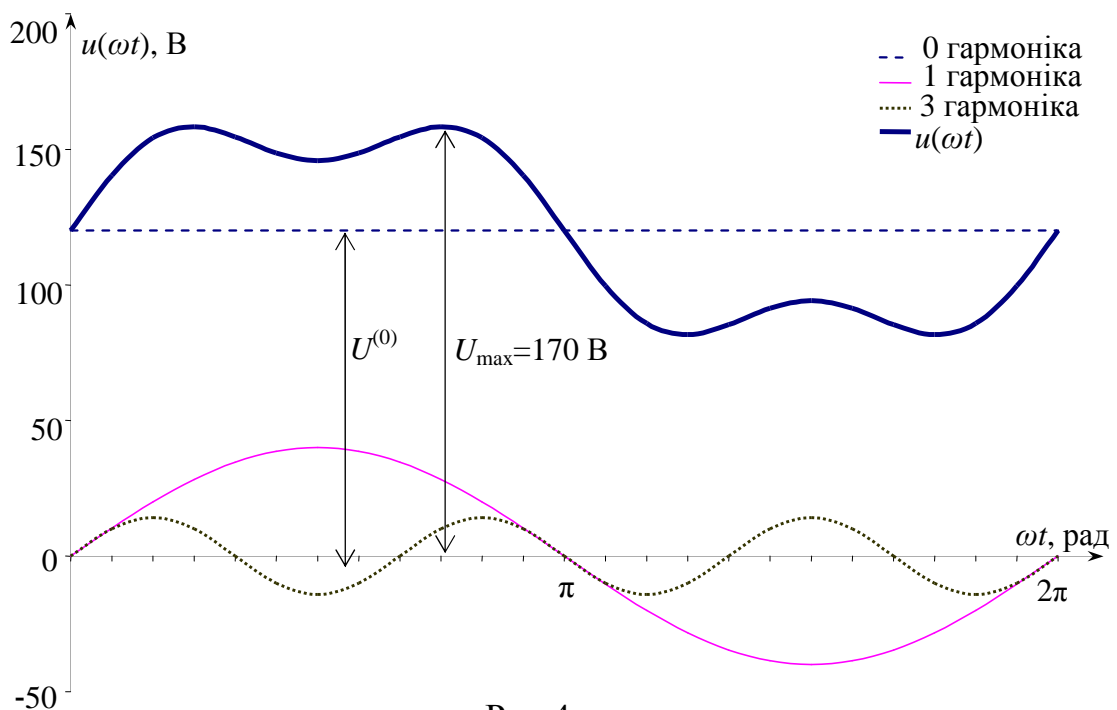


Рис.4

З а д а ч а 3

Визначення коефіцієнтів, що характеризують форму
несинусоїдної кривої напруги

Задана крива напруги у вигляді ряду - Фур'є: $u(\omega t) = 100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t$, В.

Побудувати криву напруги $u(\omega t)$, В.

Визначити:

- діюче значення напруги $u(\omega t)$;
- середнє значення напруги $u(\omega t)$;
- максимальне значення напруги $u(\omega t)$;
- коефіцієнт форми кривої напруги K_ϕ ;
- коефіцієнт амплітуди K_A ;
- коефіцієнт викривлення K_H по напрузі.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні величини й коефіцієнти негармонійних струму і напруги;
- вміти визначати аналітично максимальне та середнє значення несинусоїдної функції; будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції.

Вирішення

1. Графік несинусоїдної напруги $u(\omega t)$ поданий на рис.5.

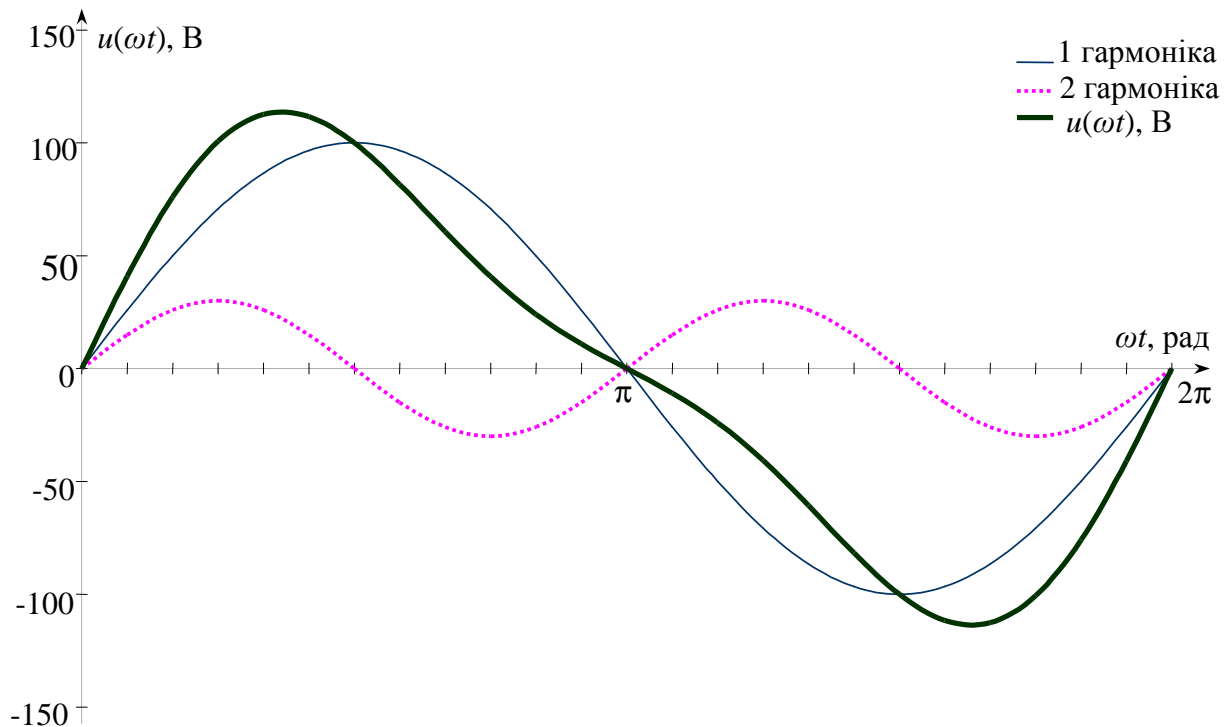


Рис.5

2. Діюче значення напруги $U = \sqrt{\frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(2)2}}{2}} = \sqrt{\frac{100^2}{2} + \frac{30^2}{2}} = 73,8 \text{ В.}$

3. Середнє за модулем значення напруги $u(\omega t)$.

Як видно з рис.2, крива напруги $u(\omega t)$ має один вид симетрії – відносно початку координат, тому її середнє значення знаходимо за $\frac{1}{2} \cdot T$ (T - період функції за часом):

$$U_{cp} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \left[100 \cdot (-\cos \omega t) \omega t \Big|_0^{\pi} + 30 \cdot 2 \cdot (-\cos 2\omega t) \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot [100 \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) + 60 \cdot (-1) \cdot (1 - 1)] = \frac{2 \cdot 100}{\pi} = 63,7 \text{ В.}$$

4. Максимальне значення напруги $u(\omega t)$.

Беремо першу похідну функції $u(\omega t)$, прирівнюємо її до нуля та знаходимо значення ωt , при якому значення функції $u(\omega t)$ матиме екстремум:

$$\frac{du}{d\omega t} = (100 \cdot \cos \omega t + 30 \cdot 2 \cdot \cos 2\omega t) = 0 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot \cos 2\omega t = 0.$$

Використаємо тригонометричну формулу $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \Rightarrow$

$$\cos 2\omega t = 2 \cdot \cos^2 \omega t - 1 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot (2 \cdot \cos^2 \omega t - 1) = 0.$$

Таким чином отримуємо квадратне рівняння відносно $x = \cos \omega t$:

$$6 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3 = 0. \text{ Корені цього рівняння: } x_1 = 0,404; x_2 = -1,237.$$

Враховуємо, що $x = \cos \omega t$, тому відкидаємо другий корінь.

$$\cos \omega t = 0,404 \Rightarrow \omega t = \arccos 0,404 = \frac{\pi}{180} \cdot 66,17 = 1,1549 \text{ рад.}$$

Підставимо знайдене значення ωt в рівняння функції $u(\omega t)$, отримуємо:

$$U_{\max} = 100 \cdot \sin 1,1549 + 30 \cdot \sin(2 \cdot 1,1549) = 113,65 \text{ В.}$$

5. Коефіцієнт форми кривої напруги $K_{\phi} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{73,8}{63,7} = 1,16.$

6. Коефіцієнт амплітуди $K_A = \frac{U_{\max}}{U} = \frac{113,65}{73,8} = 1,54.$

7. Коефіцієнт викривлення за напругою $K_H = \frac{U^{(1)}}{U} = \frac{100/\sqrt{2}}{73,8} = 0,96.$

З а д а ч а 4

Представлення несинусоїдної кривої ЕРС геометрично правильної форми, що задана графічно, у вигляді ряду Фур'є та складання схеми заміщення джерела

Задана крива напруги $e(\omega t)$ графічно на рис.6 ($E_m = 6$ В).

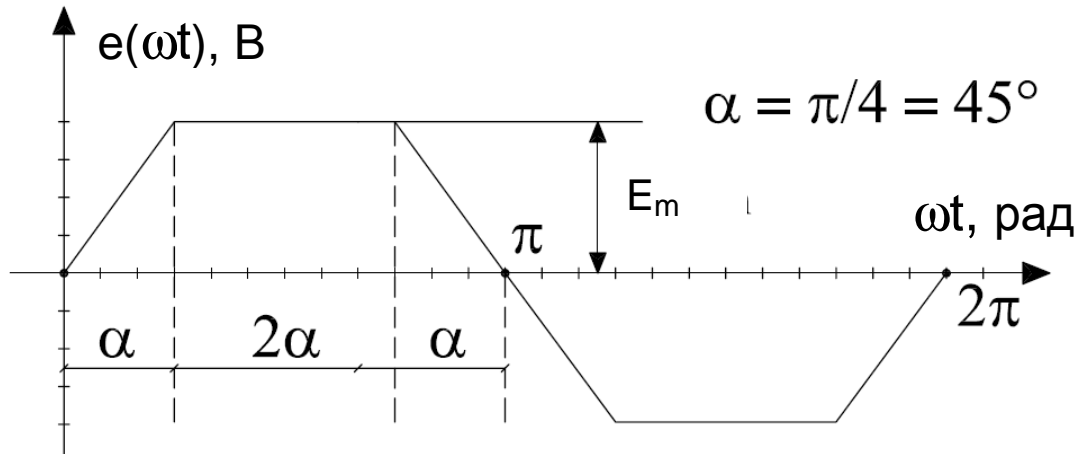


Рис.6

Представити криву напруги $e(\omega t)$, В у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших члени розкладання.

Скласти схему заміщення джерела.

Визначити діюче значення напруги $e(\omega t)$.

Для вирішення задачі треба скористатися довідковою літературою, в якій представлено розкладання в ряду Фур'є кривих геометрично правильної форми.

Вирішення

Крива $e(\omega t)$ має трапецієподібну форму, тому її ряд Фур'є має вигляд([1])

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left[\sin \alpha \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin(3\alpha) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\alpha) \cdot \sin(5\omega t) + \dots \right] \text{ В.}$$

Після підстановки значень $E_m = 6$ і $\alpha = \frac{\pi}{4}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} e(\omega t) &= e^{(1)} + e^{(3)} + e^{(5)} = \\ &= \frac{4 \cdot 6}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \pi} \cdot \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(5\omega t) \right] = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(3\omega t) - 0,194 \cdot \sin(\omega t) = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(\omega t) + 0,194 \cdot \sin(5\omega t + 180). \end{aligned}$$

Схема заміщення джерела $e(\omega t)$ подана на рис.7.

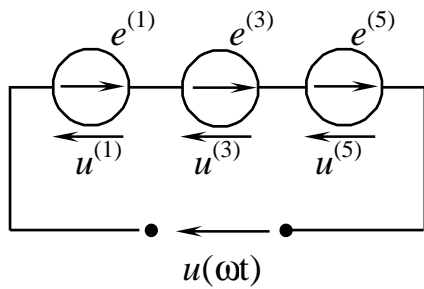


Рис.7

Діюче значення:

$$E = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2}}{2} + \frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{6,878^2}{2} + \frac{0,540^2}{2} + \frac{0,194^2}{2}} = 4,88 \text{ В.}$$

З а д а ч а 5

Подання несинусоїдної кривої джерела струму, що задана графічно (рис.6), у вигляді ряду Фур'є і складання схеми заміщення

Задана крива джерела струму $i(\omega t)$ графічно - рис.8.

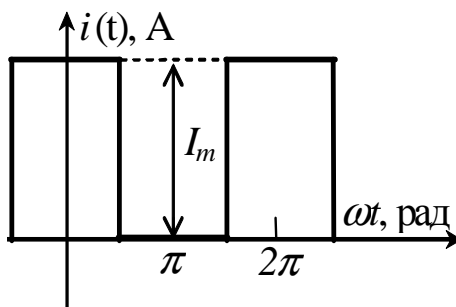


Рис.8

Представити криву джерела струму $i(\omega t)$ у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших членів розкладання.

Скласти схему заміщення джерела струму.

Визначити діюче значення напруги $e(\omega t)$.

Для вирішення задачі необхідно вміти привести задану криву до стандартного вигляду кривої геометрично правильної форми.

Вирішення

Задана крива (рис.6) має постійну складову $\frac{I_m}{2}$ і початок її зсунуто відносно осі ординат на чверть періоду $\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Для приведення заданої кривої до стандартного вигляду ($f(\omega t) = \frac{4 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$ - рис.9), треба вісь абсцис (ωt) підняти доверху на величину $\frac{I_m}{2}$ й зсунути криву вліво на чверть періоду $\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Таким чином, ряд Фур'є для кривої, що подана на рис.8, має вигляд (маємо на увазі, що $T = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\begin{aligned}
i(\omega t) &= \frac{I_m}{2} + \frac{4 \cdot I_m / 2}{\pi} \cdot \left[\sin \omega \cdot \left(t + \frac{T}{4} \right) + \frac{1}{3} \sin 3\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4} \right) + \frac{1}{5} \sin 5\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4} \right) \right] = \\
&= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \sin \left(3\omega t + \frac{3 \cdot \pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \sin \left(5\omega t + \frac{5 \cdot \pi}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\cos \omega t - \frac{1}{3} \cdot \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cdot \cos 5\omega t \right] = \\
&= 60 + 76,39 \cdot \cos \omega t - 25,46 \cdot \cos 3\omega t + 15,28 \cdot \cos 5\omega t, \text{ А.}
\end{aligned}$$

Схема заміщення подана на рис.10.

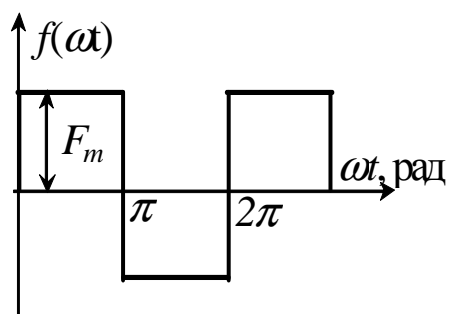


Рис.9

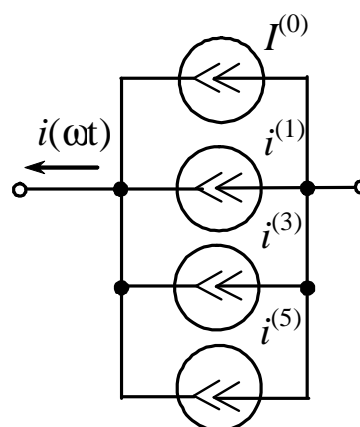


Рис.10

З а д а ч а 6

Графоаналітичне розкладання в ряд Фур'є несинусоїдної періодичної кривої геометрично неправильної форми, що задана графічно

Задана крива напруги $u(\omega t)$ на рис. 11.

Розкласти криву напруги в ряд Фур'є, обмежуючись трьома першими членами ряду.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок графоаналітичного розкладання в ряд Фур'є;
- вміти враховувати види симетрії несинусоїдної функції, що напряму пов'язано з гармонічним складом ряду Фур'є.

Вирішення

Слід врахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме:

$$u(\omega t) = U_m^{(1)} \cdot \sin \omega t + U_m^{(3)} \cdot \sin 3\omega t + U_m^{(5)} \cdot \sin 5\omega t + \dots$$

Розділимо чверть періоду функції $u(\omega t)$ на шість рівних частин і виміряємо

ординати функції $u(\omega t)$ посередині кожної ділянки. При розкладанні кривої $u(\omega t)$ в ряд Фур'є доцільно використовувати відповідні комп'ютерні програми (MathCad Professional, MS Excel та ін.).

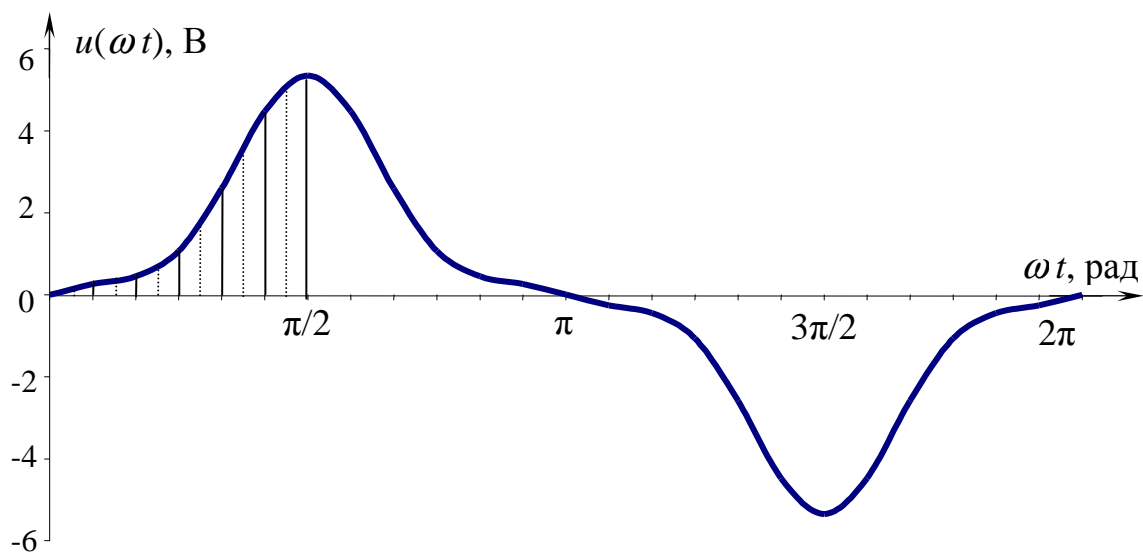


Рис. 11

Результати розкладання наведені в табл.1 (обмежуємося трьома членами ряду).

Таблиця 1 - Розкладання в ряд Фур'є функції $u(\omega t)$

P	$u(\omega t)$	$\kappa=1$			$\kappa=3$			$\kappa=5$		
		ωt	$\sin \omega t$	$u \cdot \sin \omega t$	$3\omega t$	$\sin 3\omega t$	$u \cdot \sin 3\omega t$	$5 \cdot \omega t$	$\sin 5\omega t$	$u \cdot \sin 5\omega t$
1	0,2	7,5	0,131	0,026	22,5	0,383	0,077	37,5	0,609	0,122
2	0,4	22,5	0,383	0,153	67,5	0,924	0,370	112,5	0,924	0,370
3	0,7	37,5	0,609	0,426	112,5	0,924	0,647	187,5	-0,131	-0,091
4	1,3	52,5	0,793	1,031	157,5	0,383	0,498	262,5	-0,991	-1,289
5	4,2	67,5	0,924	3,880	202,5	-0,383	-1,607	337,5	-0,383	-1,607
6	4,8	82,5	0,991	4,759	247,5	-0,924	-4,434	412,5	0,793	3,808
сума Σ		$\sum_1^6 1 = 10,276$			$\sum_1^6 3 = -4,451$			$\sum_1^6 5 = 1,312$		

Знайдемо $U_m^{(1)}$, $U_m^{(3)}$; $U_m^{(5)}$. Амплітуди дорівнюватимуть, В:

$$U_m^{(1)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 1 = \frac{1}{3} \cdot 10,276 = 3,425;$$

$$U_m^{(3)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 3 = \frac{1}{3} \cdot (-4,451) = -1,484; \quad U_m^{(5)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 5 = \frac{1}{3} \cdot 1,312 = 0,437.$$

Таким чином, ряд Фур'є має вигляд

$$u(\omega t) = 3,425 \cdot \sin \omega t - 1,484 \cdot \sin 3\omega t + 0,437 \cdot \sin 5\omega t, \text{ В.}$$

З а д а ч а 7

Розрахунок нерозгалуженого R - L - C кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

Задана крива напруги у вигляді ряду Фур'є

$$u(\omega t) = 180 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) + 120 \cdot \sin(3\omega t) + 80 \cdot \sin(5\omega t + 30^\circ), \text{ В.}$$

Параметри R - L - C кола (рис.12):

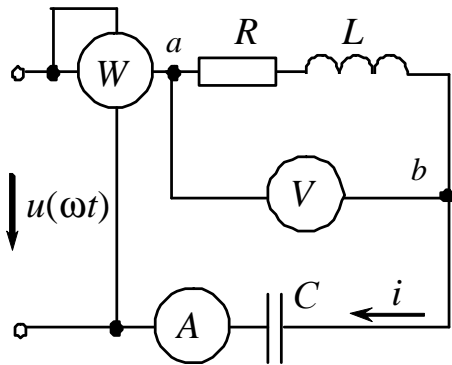


Рис. 12

$$R = 6 \text{ Ом}, X_L = \omega \cdot L = 2 \text{ Ом}, X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 18 \text{ Ом.}$$

Визначити:

- миттєве значення струму $i(\omega t)$;
- миттєве значення напруги на ділянці кола « ab »;
- показання приладів електродинамічної системи;
- значення повної, реактивної і потужності викривлення;

- коефіцієнт викривлення K_B за потужністю.

Для вирішення задачі необхідно

- знати порядок розрахунку електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії;
- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

Вирішення

1. Визначаємо комплексні амплітуди напруги кожної гармоніки окремо, В.

$$\underline{U}_m^{(1)} = 180 \angle -30^\circ \text{ В}, \underline{U}_m^{(3)} = 120 \text{ В}, \underline{U}_m^{(5)} = 80 \angle 30^\circ \text{ В.}$$

2. Визначаємо комплексні опори кола й опори ділянки « ab » для кожної гармоніки.

$$\underline{Z}^{(1)} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 6 + j \cdot (2 - 18) = 6 - j \cdot 16 = 17 \angle -69,4^\circ \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}^{(3)} = R + j \cdot \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right) = 6 + j \left(3 \cdot 2 - \frac{18}{3} \right) = 6 + j \cdot (6 - 6) = 6 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}^{(5)} = R + j \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C} \right) = 6 + j \cdot \left(5 \cdot 2 - \frac{18}{5} \right) = 6 + j \cdot 6,4 = 8,8 \angle 46,8^\circ \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(1)} = R + j \cdot \omega \cdot L = 6 + j \cdot 2 = 6,3 \angle 18,4^\circ \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(3)} = R + j \cdot 3 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 3 \cdot 2 = 8,5 \angle 45^\circ \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(5)} = R + j \cdot 5 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 5 \cdot 2 = 11,7 \angle 59^\circ \text{ Ом.}$$

3. Визначаємо комплекси амплітудних значень струму для окремих гармонік:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{180 \angle -30^\circ}{17 \angle -69,4^\circ} = 10,6 \angle 39,4^\circ \text{ А,} \quad \underline{I}_m^{(3)} = \frac{\underline{U}_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{120}{6} = 20 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_m^{(5)} = \frac{\underline{U}_m^{(5)}}{\underline{Z}^{(5)}} = \frac{80 \angle 30^\circ}{8,8 \angle 46,8^\circ} = 9,1 \angle -16,8^\circ \text{ А.}$$

4. Миттєве значення струму кола для окремих гармонік, А:

$$i^{(1)} = 10,6 \cdot \sin(\omega t + 39,4^\circ); \quad i^{(3)} = 20 \cdot \sin(3\omega t);$$

$$i^{(5)} = 9,1 \cdot \sin(5\omega t - 16,8^\circ).$$

За методом накладання:

$$i(\omega t) = i^{(1)} + i^{(3)} + i^{(5)} = [10,6 \sin(\omega t + 39,4^\circ) + 20 \sin(3\omega t) + 9,1 \sin(5\omega t - 16,8^\circ)] \text{ А.}$$

5. Визначаємо комплекси амплітудних значень напруги на ділянці «ab» для кожної гармоніки, В:

$$\underline{U}_{mab}^{(1)} = \underline{I}_m^{(1)} \underline{Z}_{ab}^{(1)} = 10,6 \angle 39,4^\circ \cdot 6,3 \angle 18,4^\circ = 66,8 \angle 57,8^\circ.$$

$$\underline{U}_{mab}^{(3)} = \underline{I}_m^{(3)} \underline{Z}_{ab}^{(3)} = 20 \cdot 8,5 \angle 45^\circ = 170 \angle 45^\circ.$$

$$\underline{U}_{mab}^{(5)} = \underline{I}_m^{(5)} \underline{Z}_{ab}^{(5)} = 9,1 \angle -16,8^\circ \cdot 11,7 \angle 59^\circ = 106,5 \angle 42,2^\circ.$$

6. Миттєве значення напруги на ділянці кола «ab»

Миттєві значення напруги для окремих гармонік, В:

$$u_{ab}^{(1)} = 66,8 \cdot \sin(\omega t + 57,8^\circ); \quad u_{ab}^{(3)} = 170 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ);$$

$$u_{ab}^{(5)} = 106,5 \cdot \sin(5\omega t + 42,2^\circ).$$

За методом накладання:

$$u_{ab}(\omega t) = u_{ab}^{(1)} + u_{ab}^{(3)} + u_{ab}^{(5)} = 66,8 \cdot \sin(\omega t + 57,8^\circ) + 170 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ) + 106,5 \cdot \sin(5\omega t + 42,2^\circ), \text{ В.}$$

7. Показання приладів електродинамічної системи дорівнює діючим значенню відповідних величин:

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2} + \frac{I_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{10,6^2}{2} + \frac{20^2}{2} + \frac{9,1^2}{2}} = 17,2 \text{ А.}$$

$$U_{ab} = \sqrt{\frac{U_{mab}^{(1)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(3)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{66,8^2}{2} + \frac{170^2}{2} + \frac{106,5^2}{2}} = 149,5 \text{ В.}$$

Показання ватметра відповідає активній потужності всього кола:

$$P = I^2 \cdot R = 17,2^2 \cdot 6 = 1775 \text{ Вт.}$$

8. Повна, реактивна і потужність викривлення кола.

Повна потужність - $S = U \cdot I$, де U – діюче значення напруги на вході кола:

$$U = \sqrt{\frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2} + \frac{U_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{180^2}{2} + \frac{120^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 163,1 \text{ В.}$$

$$S = U \cdot I = 163,1 \cdot 17,2 = 2805,3 \text{ ВА.}$$

Реактивна потужність, ВАр:

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(3)} + Q^{(5)} = \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \left(\frac{I_m^{(3)}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right) + \left(\frac{I_m^{(5)}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C} \right) = \frac{10,6^2}{2} \cdot (-16) + \frac{20^2}{2} \cdot 0 + \frac{9,1^2}{2} \cdot 6,4 = -633,9.$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{2805,5^2 - 1775^2 - 633,9^2} = 2078,1 \text{ ВА.}$$

9. Коефіцієнт викривлення за потужністю:

$$K_B = \frac{T}{S} = \frac{2078,1}{2805,5} = 0,74.$$

З а д а ч а 8

Розрахунок складного кола, що живиться несинусоїдним і постійними джерелами напруги

Задані ЕРС і параметри кола на рис.13:

$$e_1(\omega t) = [60 + 30 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) + 60 \cdot \sin(2\omega t - 20^\circ)] \text{ В;}$$

$$E_2 = 30 \text{ В, } E_3 = 40 \text{ В.}$$

Опори кола дорівнюють:

$$R = 6 \text{ Ом, } X_{L2}^{(1)} = \omega \cdot L_2 = 30 \text{ Ом,}$$

$$X_{L3}^{(1)} = \omega \cdot L_3 = 10 \text{ Ом, } X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega \cdot C} = 40 \text{ Ом.}$$

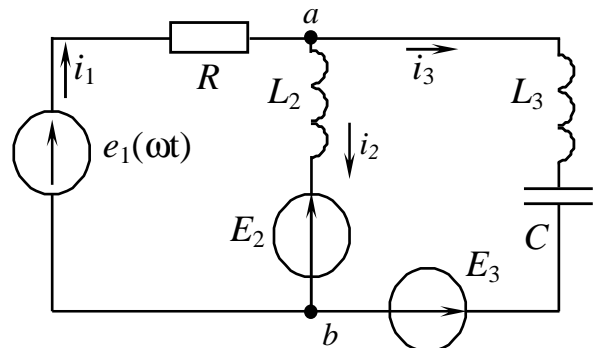


Рис.13

Визначити:

- миттєве значення струмів кола $i_1(\omega t)$, $i_2(\omega t)$, $i_3(\omega t)$;

- миттєве значення напруги на ділянці кола «ab» - $u_{ab}(\omega t)$;
- миттєве значення напруги на ємності $u_C(\omega t)$;
- діючі значення всіх вищевказаних величин;
- активну потужність кола.

Для вирішення задачі необхідно

- знати порядок розрахунку складних електричних кіл, де діють періодичні несинусоїдні джерела енергії та джерела постійної напруги;
- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

Вирішення

Розрахунок ведемо методом накладання.

1. Розрахунок кола для нульової гармоніки (схема має вигляд на рис.14).

для нульової гармоніки ємність представляє нескінченно великий опір (розрив), а індуктивність – нульовий опір.

$$E_1^{(0)} = 60 \text{ В}, \underline{Z}_2^{(0)} = 0; \underline{Z}_3^{(0)} = \infty.$$

$$I_3^{(0)} = 0 \text{ А}; I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = \frac{E_1^{(0)} - E_2}{R} = \frac{60 - 30}{60} = 0,5 \text{ А}.$$

$$U_{ab}^{(0)} = E_2 = 30 \text{ В}; U_C^{(0)} = E_2 - E_3 = -10 \text{ В}.$$

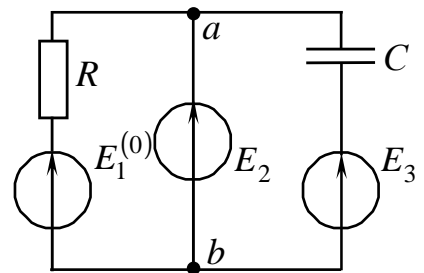


Рис.14

2. Розрахунок кола для першої гармоніки (схема має вигляд на рис.15):

$$\underline{E}_{1m}^{(1)} = 30 \angle 60^\circ \text{ В}; \underline{Z}_1^{(1)} = R = 60 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(1)} = j \cdot \omega L_2 = j \cdot 30 = 30 \angle 90^\circ \text{ Ом}; \underline{Z}_3^{(1)} = j \cdot \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C} \right) =$$

$$j \cdot (10 - 40) = -j \cdot 30 = 30 \angle -90^\circ \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_{1m}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{1m}^{(1)}}{\underline{Z}_1^{(1)} + \frac{\underline{Z}_2^{(1)} \cdot \underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}}} = \frac{30 \angle 60^\circ}{60 + \frac{j \cdot 30 \cdot (-j) \cdot 30}{j \cdot 30 - j \cdot 30}} = \frac{30 \angle 60^\circ}{\infty} = 0 \text{ А}.$$

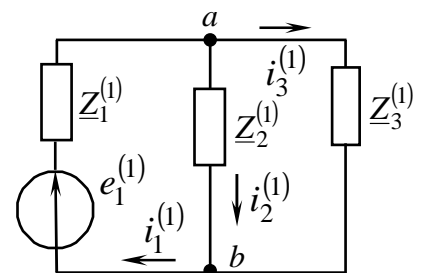


Рис.15

У даному випадку маємо резонанс струмів, тому $\underline{U}_{abm}^{(1)} = \underline{E}_{1m}^{(1)} = 30 \angle 60^\circ \text{ В}.$

Струми віток, А:

$$\underline{I}_{2m}^{(1)} = \frac{\underline{U}_{abm}^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)}} = \frac{30 \angle 60^\circ}{30 \angle 90^\circ} = 1 \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_{3m}^{(1)} = \frac{\underline{U}_{abm}^{(1)}}{\underline{Z}_3^{(1)}} = \frac{30 \angle 60^\circ}{30 \angle -90^\circ} = 1 \angle 150^\circ.$$

Напруга на ємності

$$\underline{U}_{Cm}^{(1)} = \underline{I}_{3m}^{(1)} \cdot \left(-j \cdot \frac{1}{\omega C} \right) = 1 \angle 150^\circ \cdot 40 \angle -90^\circ = 40 \angle 60^\circ \text{ В.}$$

Запишемо миттєві значення струмів і напруг першої гармоніки:

$$i_1^{(1)} = 0; \quad i_2^{(1)} = 1 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А}, \quad i_3^{(1)} = 1 \cdot \sin(\omega t + 150^\circ) \text{ А};$$

$$u_{ab}^{(1)} = 30 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}; \quad u_C^{(1)} = 40 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В.}$$

3. Розрахунок кола для другої гармоніки (схема має вигляд на рис.16):

$$\underline{Z}_2^{(2)} = 2 \cdot \omega L_2 = j \cdot 60 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3^{(2)} = j \cdot \left(2 \cdot \omega L_3 - \frac{1}{2\omega C} \right) = j \cdot \left(2 \cdot 10 - \frac{40}{2} \right) = 0 \text{ Ом.}$$

Струми віток, А:

$$\underline{I}_{1m}^{(2)} = \underline{I}_{3m}^{(2)} = \frac{E_{1m}^{(2)}}{\underline{Z}_1^{(2)}} = \frac{60 \angle -20^\circ}{60} = 1 \angle -20^\circ; \quad \underline{I}_{2m}^{(2)} = 0.$$

Напруги на ємності та ділянці «ab»:

$$\underline{U}_{abm}^{(2)} = \underline{I}_{2m}^{(2)} \cdot \underline{Z}_2^{(2)} = 0 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{Cm}^{(2)} = \underline{I}_{3m}^{(2)} \cdot \left(-j \cdot \frac{1}{2\omega C} \right) = 1 \angle -20^\circ \cdot (-j20) = 20 \angle -110^\circ \text{ В.}$$

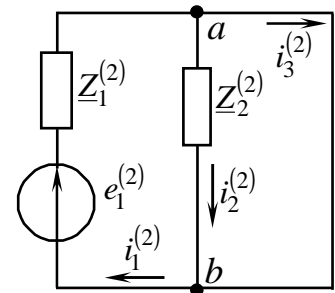


Рис.16

Запишемо миттєві значення струмів і напруг першої гармоніки:

$$i_1^{(2)} = i_3^{(2)} = 1 \cdot \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А}; \quad i_2^{(2)} = 0 \text{ А.} \quad u_{ab}^{(2)} = 0 \text{ В}; \quad u_C^{(2)} = 40 \cdot \sin(2\omega t - 110^\circ) \text{ В.}$$

6. Миттєві значення величин:

$$i_1 = I_1^{(0)} + i_1^{(1)} + i_1^{(2)} = 0,5 + 1 \cdot \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А};$$

$$i_2 = I_2^{(0)} + i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = 0,5 + \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А};$$

$$i_3 = I_3^{(0)} + i_3^{(1)} + i_3^{(2)} = 1 \cdot \sin(\omega t + 150^\circ) + 1 \cdot \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А};$$

$$u_{ab} = U_{ab}^{(0)} + u_{ab}^{(1)} + u_{ab}^{(2)} = 30 + 30 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В};$$

$$u_C = U_C^{(0)} + u_C^{(1)} + u_C^{(2)} = -10 + 40 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) + 20 \sin(2\omega t - 110^\circ) \text{ В.}$$

7. Діючі значенні величин:

$$I_1 = I_2 = \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 0,865 \text{ А}, \quad I_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1 \text{ А};$$

$$U_{ab} = \sqrt{30^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}} \right)^2} = 37 \text{ В}; \quad U_C = \sqrt{10^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}} \right)^2} = 33 \text{ В.}$$

8. Активна потужність кола $P = I_1^2 \cdot R = 45 \text{ Вт.}$

З а д а ч а 9

Розрахунок розгалуженого R - L - C кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

Задана несинусоїдна напруга у вигляді ряду Фур'є:

$$u(\omega t) = 30 + 15 \cdot \sin \omega t + 20 \cdot \sin 3\omega t, \text{ В.}$$

Параметри кола (рис.17) дорівнюють: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,5 \text{ Ом}$, $X_L^{(1)} = 1 \text{ Ом}$,
 $X_C^{(1)} = 9 \text{ Ом}$.

Визначити:

- миттєве значення струму кола $i(\omega t)$;
- діючі значення входної напруги $u(\omega t)$ і струму $i_1(\omega t)$;
- активну, реактивну і повну потужності кола.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку складних електричних кіл, де діють періодичні несинусоїдні джерела енергії;

- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

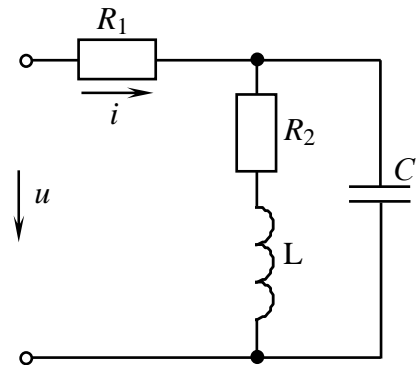


Рис.17

Рішення:

1. Визначаємо струм нульової гармоніки (рис.18):

$$X_L^{(0)} = 0 \text{ Ом}; X_C^{(0)} = \infty \text{ Ом};$$

$$I^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ А.}$$

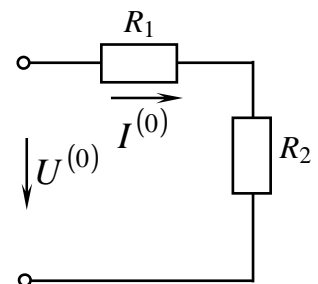


Рис.18

2. Розрахунок першої гармоніки.

Комплексний опір кола для першої гармоніки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^{(1)} &= R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(1)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(1)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(1)} - j \cdot X_C^{(1)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 1) \cdot (-j \cdot 9)}{0,5 + j \cdot (1 - 9)} = \\ &= 1 + \frac{1,118 \angle 63,43^\circ \cdot 9 \angle -90^\circ}{8,016 \angle -86,42^\circ} = 1 + 1,255 \angle 59,85^\circ = 1 + 0,63 + j \cdot 1,085 = \\ &= 1,63 + j \cdot 1,085 = 1,96 \angle 33,65^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Визначаємо комплекс і миттєве значення струму першої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{15 \angle 0^\circ}{1,96 \angle 33,65^\circ} = 7,65 \angle -33,65^\circ \Rightarrow i^{(1)} = 7,65 \cdot \sin(\omega t - 33,65^\circ).$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Комплексний опір кола для третьої гармоніки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^{(3)} &= R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(3)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(3)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(3)} - j \cdot X_C^{(3)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 3) \cdot (-j \cdot 3)}{0,5 + j \cdot \left(1 \cdot 3 - \frac{9}{3}\right)} = \\ &= 1 + \frac{3,04 \angle 80,54^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ}{0,5} = 1 + 18,24 \angle -9,46^\circ = 1 + 17,99 - j \cdot 3 = \\ &= 18,99 - j \cdot 3 = 19,22 \angle -8,98^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Визначаємо комплекс і миттєве значення струму третьої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(3)} = \frac{\underline{U}_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{20 \angle 0^\circ}{19,22 \angle -8,98^\circ} = 1,0405 \angle 8,98^\circ \Rightarrow i^{(3)} = 1,0405 \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 8,98^\circ).$$

4. Ряд Фур'є для струму $i(\omega t)$:

$$i(\omega t) = I^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 20 + 7,65 \cdot \sin(\omega t - 33,65^\circ) + 1,04 \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 8,98^\circ), \text{ А}$$

5. Діючі значення напруги і струму:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(3)2}} = \sqrt{30^2 + \frac{15^2}{2} + \frac{20^2}{2}} = 34,8 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot (I_m^{(1)2} + I_m^{(3)2})} = \sqrt{20^2 + \frac{7,65^2}{2} + \frac{1,04^2}{2}} = 20,73 \text{ А.}$$

6. Повна, активна, реактивна і потужність викривлення.

Повна потужність - $S = U \cdot I = 34,8 \cdot 20,73 = 21,45 \text{ ВА.}$

$$\begin{aligned} \text{Активна потужність: } P &= U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos \varphi^{(3)}) = \\ &= 30 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,65 \cdot \cos 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \cos(-8,98^\circ)) = 658 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \sin \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \sin \varphi^{(3)}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,6 \cdot \sin 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \sin(-8,98^\circ)) = 29,96 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{721,46^2 - 658^2 - 29,96^2} = 294,3 \text{ ВА.}$$

$$\text{Коефіцієнт викривлення потужності: } K_T = \frac{T}{S} = \frac{294,3}{721,46} = 0,408.$$

Тема 2. "РОЗРАХУНОК ТРИФАЗНИХ КІЛ, ЩО ЖИВЛЯТЬСЯ НЕГАРМОНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ НАПРУГИ"

Загальні відомості

ЕРС кожної фази трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна ЕРС (e_A, e_B, e_C) повторює по формі інші із зсувом на одну третину періоду ($T/3$) і може бути розкладена на окремі гармоніки. Постійна складова звичайно відсутня.

Нехай k - номер гармоніки ЕРС фази A : $e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k\omega t + \varphi^{(k)})$. (2.1)

Оскільки ЕРС фази B відстає від ЕРС фази A на $T/3$, а ЕРС фази C випереджає ЕРС фази A на $T/3$, то гармоніки з номером k ЕРС фаз B і C відповідно:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right). \quad (2.2)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right); \left(k\omega \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2\pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \cdot k\right). \quad (2.3)$$

Якщо $k=1, 4, 7, 10, \dots$ то гармоніка з номером k ЕРС фази B відстає на 120° від гармоніки ЕРС фази A , а ЕРС фази C випереджає на 120° гармоніку ЕРС фази A . Отже ці гармоніки утворюють систему прямої послідовності фаз.

Якщо $k=2, 5, 8, 11, \dots$ то гармоніка з номером k ЕРС фази B випереджає на 120° гармоніку ЕРС фази A , а ЕРС фази C відстає на 120° від гармоніки ЕРС фази A . Отже, ці гармоніки утворюють систему зворотної послідовності фаз.

Гармоніки, які кратні трьом ($k=3, 6, 9, \dots$), утворюють систему нульової послідовності, тобто ці гармоніки ЕРС усіх трьох фаз співпадають за фазою ($3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$): $e_A^{(3k)} = e_B^{(3k)} = e_C^{(3k)} = E_m^{(3k)} \cdot \sin(3k\omega t + \varphi^{(3k)})$. (2.4)

На рис.19 подані векторні діаграми для прямої, зворотної і нульової послідовності чергування фаз.

Розглянемо особливості роботи трифазних систем, викликані гармоніками, що кратні трьом:

1. При з'єднанні обмоток трифазного генератора трикутником (рис.20) по ним протікають струми гармонік, які кратні трьом, навіть при відсутності зовнішнього навантаження. Алгебраїчна сума цих гармонік ЕРС дорівнює $3 \cdot E^{(3k)}$.

2. Якщо опір обмотки кожної фази для гармонік, що кратні трьом - $\underline{Z}^{(3k)}$,

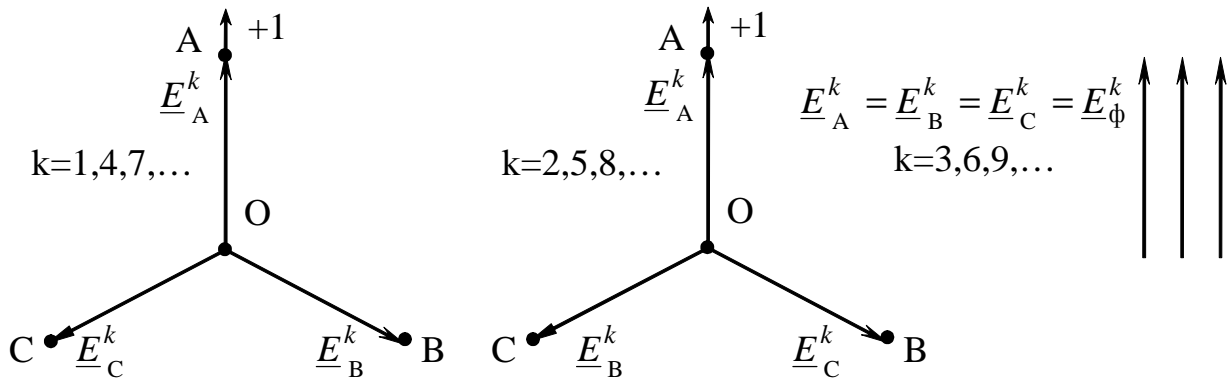


Рис.19

то струм цих гармонік у трикутнику
$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}^{(3k)}}, \quad (2.5)$$

(де $\underline{E}^{(3k)}$ - комплекс діючого значення гармоніки фазних ЕРС, що кратні трьом).

Діюче значення струму, який протікає по замкнутому трикутнику в схемі на рис. 20
$$-I = \sqrt{I^{(3)2} + I^{(6)2} + I^{(9)2} + \dots}. \quad (2.6)$$

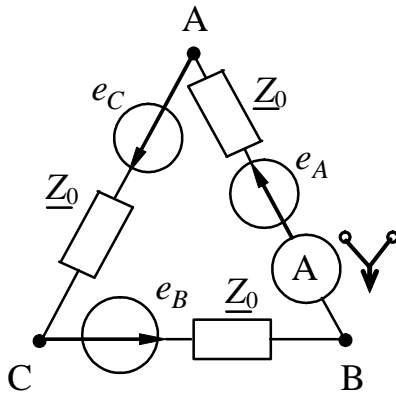


Рис.20

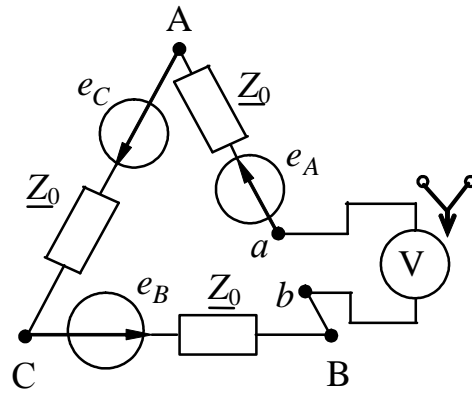


Рис.21

2. Якщо з'єднати обмотки трифазного генератора у відкритий трикутник (рис.21), то при наявності у фазових ЕРС гармонік, що кратні трьом, на затискачах a і b буде несинусоїдна напруга, яка дорівнює сумі ЕРС цих гармонік:

$$u_{ab} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3\omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6\omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (2.7)$$

Показання вольтметра теплової системи у схемі на рис.19:

$$U = 3 \cdot \sqrt{E^{(3)2} + E^{(6)2} + E^{(9)2} + \dots}. \quad (2.8)$$

3. У лінійній напрузі, якщо обмотки генератора з'єднані зіркою, гармоніки, що кратні трьом, відсутні, тому що $\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0$ (аналогічно для $\underline{U}_{BC}^{(3k)}$ і $\underline{U}_{CA}^{(3k)}$). Тоді діюче значення лінійної напруги:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U^{(1)2} + U^{(2)2} + U^{(4)2} + \dots}. \quad (2.9)$$

Діюче фазної напруги, що містить всі гармоніки -

$$U_{\phi} = \sqrt{U^{(1)2} + U^{(2)2} + U^{(3)2} + U^{(4)2} + \dots}, \quad (2.10)$$

тому співвідношення $U_L / U_{\phi} < \sqrt{3}$.

3. При з'єднання трифазного джерела ЕРС трикутником (рис.18) при відсутності зовнішнього навантаження:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \frac{3 \cdot \underline{E}_A^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} = 0. \quad (2.11)$$

При наявності симетричного навантаження, з'єданого трикутником, кожна фаза генератора та паралельно до неї приєднане навантаження можуть бути замінені еквівалентною віткою, з деякою ЕРС $\underline{E}^{(3)}/$ та опором \underline{Z}_3' . На отриману схему можна застосувати висновок, зроблений для випадку відсутності зовнішнього навантаження.

5. При з'єднанні генератора й симетричного навантаження зіркою (рис.22) за відсутності нульового проводу струми третіх та інших гармонік нульової послідовності не можуть протікати по лінійних проводах.

Напруга зміщення нейтралі для гармонік, що кратні трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot 3 \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}} = \underline{E}_{\phi}^{(3k)}. \quad (2.12)$$

Тому лінійні струми для гармонік, що кратні трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(3k)}} = 0. \quad (2.13)$$

При несиметричному навантаженні:

$$\underline{U}_{010}^{(3)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)})}{\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)}} = \underline{E}_{\phi}^{(3)}. \quad (2.14)$$

Тому лінійні струми для гармонік, що кратні трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad (2.15)$$

$$\underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0, \quad (2.16)$$

$$\underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0. \quad (2.17)$$

Миттєве значення напруги зміщення нейтралі при симетричному і неси-

метричному навантаженні - $u_{010} = E_m^{(3)} \cdot \sin 3\omega t + E_m^{(6)} \cdot \sin 6\omega t + \dots$, а діюче значення - $U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots}$.

(2.18)

6. Якщо маємо схему зірка – зірка при симетричному навантаженні фаз та наявності опору \underline{Z}_0 в нульовому проводі (рис.23), то по ньому будуть протікати

струми гармонік, що кратні трьом:

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)} + \frac{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}{3}} .$$

(2.19)

Лінійні струми при цьому - $\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}$.

(2.20)

Напруга зміщення нейтралі - $\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{E_\phi^{(3k)} \cdot 3 \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} .$

(2.21)

7. Якщо маємо схему зірка – зірка при несиметричному навантаженні фаз та наявності опору \underline{Z}_0 в нульовому проводі (рис.23), то по ньому також будуть протікати струми гармонік, що кратні трьом.

Напруга зміщення нейтралі - $\underline{U}_{010}^{(3)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)})}{\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)} + \underline{Y}_0^{(3)}} .$

(2.22)

Струми знаходять так:

$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} , \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} , \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} ,$

(2.23)

$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{I}_A^{(3k)} + \underline{I}_B^{(3k)} + \underline{I}_C^{(3k)} .$

(2.24)

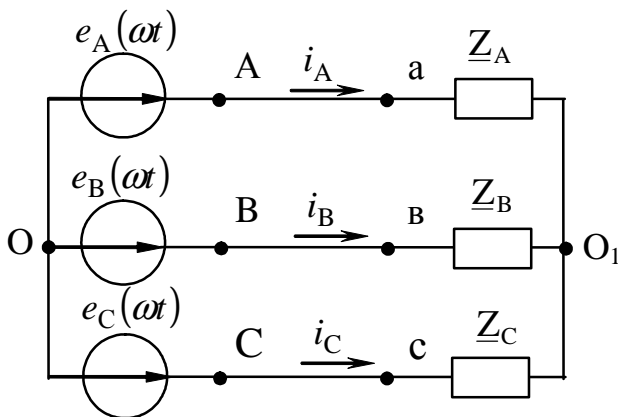


Рис.22

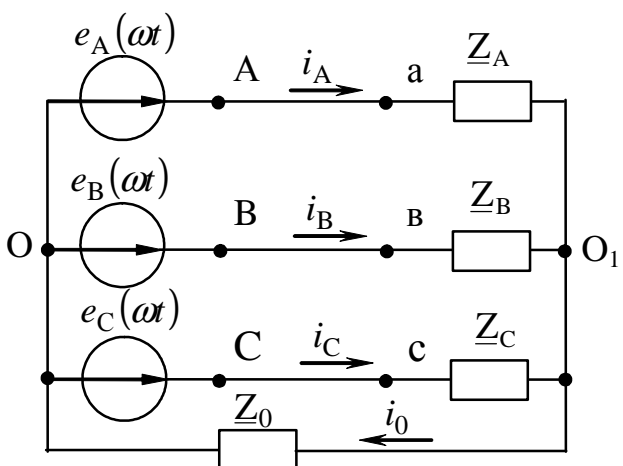


Рис.23

З а д а ч а 1

Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка» при симетричному навантаженні
з опором в нульовому проводі,
що живиться негармонійними джерелами напруги

Задана крива напруги фаза «А» у вигляді ряду Фур'є:

$$e_A(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) - 35 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t), \text{ В.}$$

Комплексні опори фаз і нульового проводу для першої гармоніки дорівнюють: $\underline{Z}_\phi^{(1)} = (5 - j \cdot 8), \text{ Ом}; \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ \text{ Ом.}$

Розрахункова схема має вигляд на рис.24.

Визначити:

- миттєві значення лінійних напруг;
- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- миттєве значення струму у нульовому проводі;
- показання приладів електромагнітної системи.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

Вирішення:

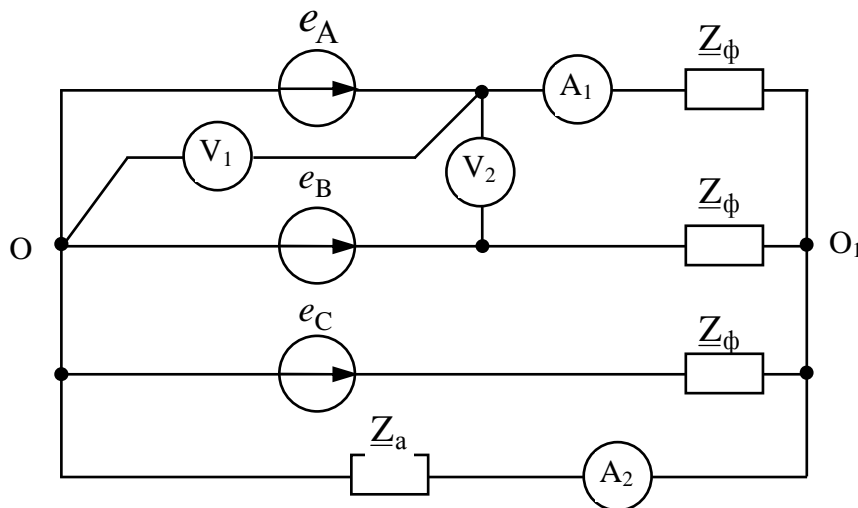


Рис.24

1. Комплекси амплітудних значень фазних ЕРС для всіх гармонік, В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 75 \angle 30^\circ, \underline{E}_{mB}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ - 120^\circ) = 75 \angle -90^\circ, \underline{E}_{mC}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ + 120^\circ) = 75 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(3)} = \underline{E}_{mB}^{(3)} = \underline{E}_{mC}^{(3)} = -35 \angle -30^\circ = 35 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(5)} = 25 \angle 0^\circ, \underline{E}_{mB}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ + 120^\circ) = 25 \angle 120^\circ, \underline{E}_{mC}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ - 120^\circ) = 25 \angle -120^\circ.$$

2. Комплекси амплітудних значень лінійних напруг для усіх гармонік, В:

$$\underline{U}_{mAB}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 30^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(1)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle -90^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle -60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 150^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 180^\circ. \underline{U}_{mAB}^{(3)} = \underline{U}_{mBC}^{(3)} = \underline{U}_{mCA}^{(3)} = 0.$$

$$\underline{U}_{mAB}^{(5)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 0^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -30^\circ.$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(5)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle 90^\circ.$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(5)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle -120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -150^\circ.$$

3. Розрахунок першої гармоніки.

$$\underline{Z}_{\phi}^{(1)} = 5 - j \cdot 8 = 9,43 \angle -58^\circ, \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ = 4 + j \cdot 8 \text{ Ом}.$$

Оскільки навантаження симетричне, то $\underline{U}_{m010}^{(1)} = 0$ В.

Знайдемо струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)}}{\underline{I}_{\phi}^{(1)}} = \frac{75 \angle 30^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 88^\circ = 0,28 + j \cdot 7,945,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mB}^{(1)}}{\underline{I}_{\phi}^{(1)}} = \frac{75 \angle -90^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle -32^\circ = 6,74 - j \cdot 4,21,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mC}^{(1)}}{\underline{I}_{\phi}^{(1)}} = \frac{75 \angle 30^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 152^\circ = -7,02 + j \cdot 3,73.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{mo}^{(1)} = \underline{I}_{mA}^{(1)} + \underline{I}_{mB}^{(1)} + \underline{I}_{mC}^{(1)} = 0,28 + j \cdot 7,945 + 6,74 - j \cdot 4,21 - 7,02 - j \cdot 3,73 \approx 0 \text{ А}.$$

4. Розрахунок третьої гармоніки:

$$\underline{Z}_{\phi}^{(3)} = 5 - j \cdot \frac{8}{3} = 5 - j \cdot 2,67 = 5,67 \angle -28,1^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0^{(3)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 3 = 4 - j \cdot 24 = 24,33 \angle -80,5^\circ \text{ Ом}.$$

Напруга зміщення нейтралі при симетричному навантаженні:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot 3 \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(3)} \cdot \underline{Z}_0^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3)}}{3}}.$$

Знайдемо струм у нульовому проводі, А:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{m0}^{(3)} &= \frac{\underline{U}_{m010}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)}} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_\phi^{(3)}}{3}} = \frac{35\angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + \frac{(5 - j \cdot 2,67)}{3}} = \frac{35\angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + 1,67 - j \cdot 0,89} = \\ &= \frac{35\angle 150^\circ}{5,67 + j \cdot 23,11} = \frac{35\angle 150^\circ}{23,8\angle 76,2^\circ} = 1,47\angle 73,8^\circ = 0,41 + j \cdot 1,41.\end{aligned}$$

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{I}_{mB}^{(3)} = \underline{I}_{mC}^{(3)} = \frac{\underline{I}_{m0}^{(3)}}{3} = \frac{1,47\angle 73,8^\circ}{3} = 0,49\angle 73,8^\circ.$$

5. Розрахунок п'ятої гармоніки:

$$\underline{Z}_\phi^{(5)} = 5 - j \cdot \frac{8}{5} = 5 - j \cdot 1,6 = 5,25\angle -17,7^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0^{(5)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 5 = 4 + j \cdot 40 = 40,2\angle 84,3^\circ \text{ Ом}.$$

Навантаження симетричне, то $\underline{U}_{m010}^{(5)} = 0 \text{ В}$.

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(5)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(5)}}{\underline{I}_\phi^{(5)}} = \frac{25\angle 0^\circ}{5,25\angle -17,7^\circ} = 4,76\angle 17,7^\circ = 4,53 + j \cdot 1,45,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(5)} = \frac{\underline{E}_{mB}^{(5)}}{\underline{I}_\phi^{(5)}} = \frac{25\angle 120^\circ}{5,25\angle -17,7^\circ} = 4,76\angle 137,7^\circ = -3,52 + j \cdot 3,2,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(5)} = \frac{\underline{E}_{mC}^{(5)}}{\underline{I}_\phi^{(5)}} = \frac{25\angle -120^\circ}{5,25\angle -17,7^\circ} = 4,76\angle -102,3^\circ = -1,01 + j \cdot 4,65.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{m0}^{(5)} = \underline{I}_{mA}^{(5)} + \underline{I}_{mB}^{(5)} + \underline{I}_{mC}^{(5)} = 4,53 + j \cdot 1,45 - 3,52 + j \cdot 3,2 - 1,01 - j \cdot 4,65 \approx 0 \text{ А}.$$

6. Миттєві значення струмів, А:

$$\begin{aligned}i_A &= i_A^{(1)} + i_A^{(3)} + i_A^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t + 88^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + \\ &+ 4,76 \cdot \sin(5\omega t + 17,7^\circ);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_B &= i_B^{(1)} + i_B^{(3)} + i_B^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t - 32^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + \\ &+ 4,76 \cdot \sin(5\omega t + 137,7^\circ);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_C &= i_C^{(1)} + i_C^{(3)} + i_C^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t - 152^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + \\ &+ 4,76 \cdot \sin(5\omega t - 102,3^\circ);\end{aligned}$$

$$i_0 = i_0^{(3)} = 1,47 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ).$$

7. Миттєві значення фазних та лінійних напруг, В.

$$e_B(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) + 35 \cdot \sin(3\omega t + 150^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t + 120^\circ),$$

$$e_C(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t + 150^\circ) + 35 \cdot \sin(3\omega t + 150^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t - 120^\circ),$$

$$u_{AB} = u_{AB}^{(1)} + u_{AB}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t - 30^\circ),$$

$$u_{BC} = u_{BC}^{(1)} + u_{BC}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t + 90^\circ),$$

$$u_{CA} = u_{CA}^{(1)} + u_{CA}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t - 150^\circ).$$

8. Діючі значення струмів (та відповідно показники амперметрів).

Показання амперметра \mathbf{A}_1 дорівнює діючому значенню фазного струму:

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{\left(\frac{I_{mA}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7,95}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,49}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4,76}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6,56 \text{ А.}$$

Показання амперметра \mathbf{A}_2 дорівнює діючому значенню струму в нульово-

$$\text{му проводі: } I_0 = \sqrt{\left(\frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{1,47}{\sqrt{2}} = 1,04 \text{ А.}$$

9. Діючі значення напруг (та відповідно показники вольтметрів).

Показання вольтметра \mathbf{V}_1 дорівнює діючому значенню фазної напруги:

$$E_A = E_B = E_C = \sqrt{\left(\frac{E_{mC}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{75}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2} = 61,1 \text{ В.}$$

Показання вольтметра \mathbf{V}_2 дорівнює діючому значенню лінійної напруги:

$$U_{AB} = \sqrt{\left(\frac{U_{mAB}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{mAB}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{129,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{43,3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 96,8 \text{ В.}$$

Задача №2

Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка», що живиться негармонійними джерелами напруги, при несиметричному навантаженні за відсутності нульового проводу

Задана крива напруги фаза «А» у вигляді ряду Фур'є

$$e_A = 220 \cdot \sin \omega t + 80 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ), \text{ В.}$$

Опори фаз дорівнюють: $Z_A = 40 \text{ Ом}$; $Z_B^{(1)} = -j \cdot 40, \text{ Ом}$; $Z_C^{(1)} = j \cdot 40 \text{ Ом}$.

Розрахункова схема має вигляд – рис.25.

Визначити:

- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- покази приладів електромагнітної системи.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

Вирішення:

1. Розрахунок для першої гармоніки.

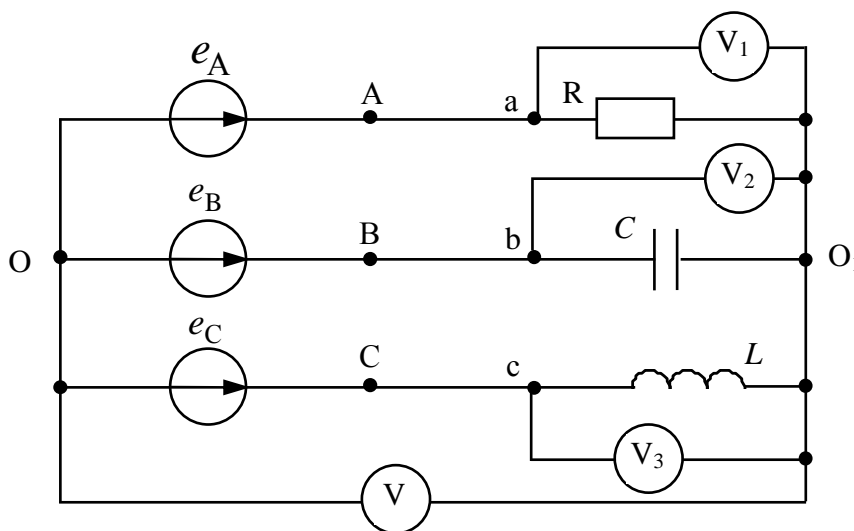


Рис.25

Комплексні амплітуди фазних ЕРС, В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 220 \angle 0^\circ; \underline{E}_{mB}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ; \underline{E}_{mC}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ.$$

$$\text{Провідності фаз, См: } \underline{Y}_A^{(1)} = \frac{1}{R} = 0,025; \underline{Y}_B^{(1)} = \frac{1}{-j \cdot x_C^{(1)}} = j \cdot 0,025;$$

$$\underline{Y}_C^{(1)} = \frac{1}{j \cdot x_L^{(1)}} = -j \cdot 0,025.$$

Напруга зміщення нейтралі, В:
$$\underline{U}_{m0_10}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} + \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)}}{\underline{Y}_A^{(1)} + \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{Y}_C^{(1)}} =$$
$$= \frac{220 \cdot 0,025 + 220 \angle -120^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ + 220 \angle 120^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ}{0,025 + j \cdot 0,025 - j \cdot 0,025} = 600.$$

Напруги на фазних навантаженнях, В:

$$\underline{U}_{ma0_1}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 - 600 = -380 = 380 \angle 180^\circ,$$

$$\underline{U}_{mb0_1}^{(1)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ - 600 = -110 - j \cdot 190 - 600 = -710 - j \cdot 190 =$$
$$= 735 \angle -165^\circ,$$

$$\underline{U}_{mc0_1}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ - 600 = -710 + j \cdot 190 = 735 \angle 165^\circ.$$

Лінійні (фазні) струми, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \underline{U}_{ma0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} = 380 \angle 180^\circ \cdot 0,025 = 9,5 \angle 180^\circ,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \underline{U}_{mb0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} = 795 \angle -165^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ = 18,35 \angle -75^\circ,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \underline{U}_{mc0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)} = 734 \angle 165^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ = 18,35 \angle 75^\circ.$$

2. Розрахунок для третьої гармоніки.

При з'єднанні генератора й симетричного навантаження зіркою за відсутності нульового проводу струми третіх та інших гармонік нульової послідовності не можуть протікати по лінійних проводах ($\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{U}_{ma0_1}^{(3)} \cdot \underline{Y}_A^{(3)} = 0$, т.к. $\underline{U}_{m0_10}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)}$; $\underline{U}_{ma0_1}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)} - \underline{U}_{m0_10}^{(3)} = 0$).

Між точками О і О₁ буде напруга зміщення нейтралі, В:

$$\underline{U}_{m00_1}^{(3)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(3)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)})}{\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)}} = \underline{E}_{mA}^{(3)} = 80 \angle -30^\circ.$$

3. Миттєві значення струмів, А:

$$i_A = i_A^{(1)} = 9,5 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ), \quad i_B = i_B^{(1)} = 18,35 \cdot \sin(\omega t - 75^\circ),$$

$$i_C = i_C^{(1)} = 18,35 \cdot \sin(\omega t + 75^\circ).$$

4. Миттєві значення напруг, В:

$$u_{a0_1} = u_{a0_1}^{(1)} = 380 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ), \quad u_{b0_1} = u_{b0_1}^{(1)} = 735 \cdot \sin(\omega t - 165^\circ),$$

$$u_{c01} = u_{c01}^{(1)} = 735 \cdot \sin(\omega t + 165^\circ),$$

$$u_{010} = u_{010}^{(1)} + u_{010}^{(3)} = 600 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ).$$

5. Показання амперметрів і вольтметрів електромагнітної системи й відповідно діючі значення струмів і напруг.

Показання амперметра A_1 дорівнює діючому значенню струму у фазі A -

$$I_A = \frac{9,5}{\sqrt{2}} = 6,74 \text{ A.}$$

Показання амперметра A_2 дорівнює діючому значенню струму у фазі B -

$$I_B = \frac{18,35}{\sqrt{2}} = 13 \text{ A.}$$

Показання амперметра A_3 дорівнює діючому значенню струму у фазі C -

$$I_C = \frac{18,35}{\sqrt{2}} = 13 \text{ A.}$$

Показання вольтметра V_1 дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі A -

$$I_A^{(1)} \cdot R = U_{a01} = \frac{380}{\sqrt{2}} = 268,7 \text{ В.}$$

Показання вольтметра V_2 дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі B -

$$I_B^{(1)} \cdot X_C^{(1)} = U_{b01} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$$

Показання вольтметра V_3 дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі C -

$$I_C^{(1)} \cdot X_L^{(1)} = U_{c01} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$$

Показання вольтметра V дорівнює діючому значенню напруги зміщення

$$\text{нейтралі} - U_{010} = \sqrt{\left(\frac{U_{m010}^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_{m010}^{(3)}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{600^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 428 \text{ В.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник.- М.: Гардарики, 2002 – 640 с.
2. Шегедін О.І., Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1: Навчальний посібник для студентів дистанційної форми навчання електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Львів: Новий Світ-2000, 2004. – 168 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до практичних занять за темами «Лінійні електричні кола з негармонійними джерелами енергії», «Розрахунок трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги» з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (для студентів усіх форм навчання напрямів 0906 - "Електротехніка" і 0922 - "Електромеханіка").

Укладачі: Яна Борисівна Форкун,
Володимир Петрович Самошкін,
Геннадій Валентинович Капустін,
Світлана Марківна Юрченко

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз.155 М

Підп. до друку 20.05.2008 р.	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк.арк. 2,0	Обл.-вид. арк. 3,2
Замовл. № .	Тираж 150 прим.	
61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12		
Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ		
61002, Харків, вул. Революції, 12		